

$$m = \text{ƯCLN}(a - b, 2b) = \text{ƯCLN}(a + b, 2a).$$

Điều này chứng tỏ m là ước chung của $2a$ và $2b$, do đó m là ước của $2d$.

Mặt khác, rõ ràng d là ước chung của $a + b$, $a - b$ nên d là ước của m .

Từ đó suy ra $m = d$ hoặc $m = 2d$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng: $\text{ƯCLN}(3a + 5b, 8a + 13b) = \text{ƯCLN}(a, b)$.

Giải

Ta có:

$$8a + 13b = 2(3a + 5b) + (2a + 3b);$$

$$3a + 5b = 1.(2a + 3b) + (a + 2b);$$

$$2a + 3b = 2(a + 2b) - b;$$

$$a + 2b = 2b + a.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \text{ƯCLN}(3a + 5b, 8a + 13b) &= \text{ƯCLN}(3a + 5b, 2a + 3b) \\ &= \text{ƯCLN}(2a + 3b, a + 2b) \\ &= \text{ƯCLN}(a + 2b, b) \\ &= \text{ƯCLN}(a, b). \end{aligned}$$

Dạng 2. Chứng minh hai số nguyên nguyên tố cùng nhau

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa và tính chất của ước chung lớn nhất

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu $\text{ƯCLN}(a, b) = 1$ thì $\text{ƯCLN}(a + b, ab) = 1$.

Giải

Sử dụng tính chất:

$$\text{“Nếu } m = nq + r \text{ thì } \text{ƯCLN}(m, n) = \text{ƯCLN}(n, r)\text{”}$$

ta có:

$$\text{ƯCLN}(a + b, a) = \text{ƯCLN}(a, b) = 1;$$

$$\text{ƯCLN}(a + b, b) = \text{ƯCLN}(a, b) = 1.$$

Do $\text{ƯCLN}(m, c) = \text{ƯCLN}(m, d) = 1$ thì $\text{ƯCLN}(m, cd) = 1$

nên

$$\text{ƯCLN}(a + b, ab) = 1.$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu các số a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau thì $ab + bc + ca$ và abc nguyên tố cùng nhau.

Giải

Ta có:

$$ab + bc + ca = (b + c)a + bc,$$

do đó

$$\text{ƯCLN}(ab + bc + ca, a) = \text{ƯCLN}(a, bc).$$

Theo giả thiết

$$\text{ƯCLN}(a, b) = \text{ƯCLN}(a, c) = 1$$

nên

$$\text{ƯCLN}(a, bc) = 1.$$

Do đó

$$\text{ƯCLN}(ab + bc + ca, a) = 1.$$

Tương tự:

$$\text{ƯCLN}(ab + bc + ca, b) = 1;$$

$$\text{ƯCLN}(ab + bc + ca, c) = 1.$$

Vậy $\text{ƯCLN}(ab + bc + ca, abc) = 1$ hay $ab + bc + ca$ và abc nguyên tố cùng nhau nếu a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau.